# СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРЫ?

© ***Колонутов М.Г.*, 2012**

*Новгородский государственный университет,*
*Россия, Великий Новгород, e-mail: kolonutov@mail.ru*

В статье обсуждается вопрос локализации энергии электростатического поля. Анализ выполнен на основе теории близкодействия. Электрическое поле проявляется двояким образом. Во-первых, оно является средством силового взаимодействия заряженных тел и в этом качестве должно иметь не равный нулю градиент потенциала. Во-вторых, движение поля порождает магнитное поле. Градиент потенциала при этом может быть любым, в том числе и равным нулю. Средствами теории упругости показано, что электростатическое поле внутри сферы находится в состоянии гидростатического сжатия и обладает отличной от нуля плотностью энергии. Плотность энергии электростатического поля вне уединенной заряженной сферы остается равной нулю до тех пор, пока в него не помещен какой-либо другой носитель заряда.

***Kolonutov M.*** *Is There Electric Field Inside a Charged Sphere?* This article discusses the localization energy of the electrostatic field. The analysis is performed using short-range theory. The electric field is manifested in two ways. The first field can be a means of force interaction between charged bodies. In this case, the gradient of the Coulomb potential can not be zero. Secondly, the movement of the electric field generates a magnetic field, regardless of the gradient. The magnetic field inside a charged sphere the result of the movement electric field gradient of the Coulomb potential is equal to zero. By means of the theory of elasticity shows that the electric field inside the sphere is in a state of hydrostatic compression and has a nonzero energy density. The energy density of the electrostatic field outside this isolated charged sphere remains zero until any other charge carrier is put into it.

## 1 Локализация энергии электрического поля

Современная электростатика утверждает, что электрическое поле вокруг уединенного заряженного тела обладает плотностью энергии, пропорциональной квадрату напряженности поля,

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.. \tag{1}$$

Это утверждение основывается, мягко говоря, на весьма спорном доказательстве. Как в учебниках, ставших классическими [1], так и во многих современных, например [2], исходным положением доказательства является выражение для энергии некоторой системы заряженных тел,

$$W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i \varphi_i. \tag{2}$$

Далее посредством замены суммы (2) интегралом (3) по объему *V*, выполняется переход к непрерывному распределению заряда с объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$,

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})dV. \tag{3}$$

Казалось бы, что уже эта формула дает недвусмысленный ответ на то, что энергия сосредоточена лишь в той области пространства, где имеется некоторая отличная от нуля плотность заряда.

В самом деле, пусть имеется заряженное по объему тело *A* (рисунок 1). Охватим его произвольно большой замкнутой поверхностью и возьмем интеграл (3) по всему объему *V* пространства, охваченному этой поверхностью.

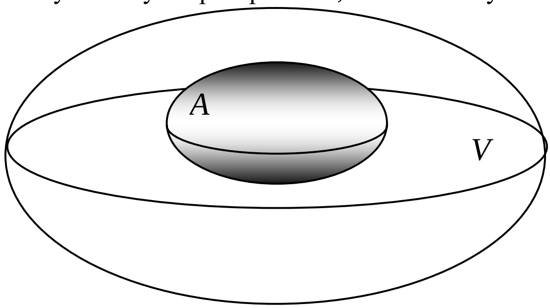


Рис. 1.

Интеграл (3) распадается при этом на сумму двух, один из которых, взятый по объему $V_A$ тела *A*, дает некоторую отличную от нуля величину энергии, второй же, взятый по объему$(V - V_A)$ всего остального пространства, не занятого заряженным телом, будет всегда равен нулю в силу того, что плотность заряда $\rho$ в этой части пространстве равна нулю.

Вместо того чтобы принять столь простое умозаключение авторы упомянутых и многих других книг начинают выполнять с интегралом (3) некоторые не всегда математические трюки. Вводится специально для этого случая понятие «полного поля», заряженное тело конечных размеров заменяется на тело бесконечно большого размера, после подмены появляется возможность выполнить предельный переход при $r \to \infty$, в результате которого появляется прямо противоположный вывод. Возникает формула (1), в соответствии с которой плотность энергии не равна нулю даже в тех точках пространства, в которых плотность заряда равна нулю. Некорректность такого вывода очевидна, но, тем не менее, формула (1) по причине отсутствия какой-либо альтернативы благополучно существует, а посягательство на неё считается смертным грехом.

Важно подчеркнуть, что выражение (2) в явном виде, а формула (3) завуалировано, являются порождением теории дальнодействия носителей заряда. Теории, в которой поле как самостоятельная сущность отсутствует. Это означает, что выводы о свойствах поля, т. е. о свойствах того, что отсутствует, сделанные на основании этой теории, не могут быть корректными ни при каких обстоятельствах.

К решению вопроса о локализации энергии в электрическом поле следует, в силу этих соображений, подходить, не иначе как рассматривая поле в качестве некоторой сплошной материальной среды, передающей силовое взаимодействие заряженных тел и подчиняющейся законам механики. В связи с этим рассмотрим еще одну ситуацию.

Пусть имеется сферический носитель радиуса $R$, обладающий зарядом $Q$. Поверхность носителя испытывает при этом силовое воздействие плотность $f$, которого определяется формулой (4),

$$f = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4}, \qquad (4)$$

и всегда направлена в сторону, соответствующую увеличению площади поверхности заряженного тела. Это, в самом деле, именно так, поскольку подтверждается постановкой соответствующих опытов.

Зададимся вопросом: чем обусловлено (каким материальным фактором) появление поверхностной плотности сил $f$, стремящейся увеличить радиус сферы?

Оставаясь в рамках концепции близкодействия, можно назвать только два кандидата на роль причины, ими могут быть либо поле внутри сферы, либо поле снаружи сферы. Наличие поля внутри сферы отвергается существующей теорией на том основании, что напряженность поля в точках внутреннего пространства сферы равна нулю. Остается электрическое поле вне сферы.

Законы механики говорят, что сила всегда действует на разделяющую поверхность в сторону области с меньшим значением плотности энергии. Но, коль скоро, внутри сферы электрическое поле отсутствует (плотность энергии равна нулю), а вне сферы имеется некоторая, отличная от нуля, плотность энергии, то сила всегда будет направлена к центру сферы, т. е. в сторону уменьшения, а не увеличения радиуса сферы. Возникшее противоречие вновь вызывает сомнение в наличии плотности энергии поля в пространстве вокруг носителя и об отсутствии электрического поля внутри рассматриваемого носителя заряда. Противоречие разрешается естественным образом, если считать, что электрическое поле (материальная среда) присутствует внутри заряженной сферы, находится в состоянии всестороннего сжатия и имеет равный нулю градиент потенциала. Нельзя отождествлять, как это делается в подавляющем большинстве учебников, равенство нулю некоторой математической характеристики (градиента потенциала) электрического поля с наличием или отсутствием его самого как материального образования.

Еще одним интересным вопросом является возникновение магнитного поля внутри заряженной сферы при её вращении. Каким образом при отсутствии электрического поля внутри сферы факт её вращения приводит к рождению из «ничего» вполне материального образования в виде магнитного поля?

Формальный математический ответ о возникновении на поверхности сферы при её вращении плотности тока и, следовательно, ротора магнитного поля является продуктом теории дальнодействия. В ней не требуется никаких передаточных звеньев между током как источником магнитного поля и удаленной точкой пространства, в которой наблюдается напряженность этого поля. По этой причине такой ответ не может быть признан удовлетворительным. Теория близкодействия требует для описания стационарного физического процесса участия только тех величин, которые характеризуют одну и ту же точку пространства. Причиной возникновения магнитного поля в некоторой точке пространства может быть только движение электрического поля в той же самой точке. Естественно, движение электрического поля возникает не само по себе, а должно быть обусловлено движением какого-то носителя (в нашем случае, вращением сферы).

Рассмотрим вопрос связи электрического и магнитного полей в точках, расположенных на оси вращения заряженной сферы, исходя из предположения, что электрическое поле внутри заряженной сферы существует, но градиент его потенциала равен нулю, следовательно, потенциал во всех точках поля одинаков и равен потенциалу $\varphi$ поверхности носителя заряда.

Предварительно определим напряженность магнитного поля создаваемого вращением тонкого кольца с линейной плотностью заряда $\tau$ в точках, расположенных на оси вращения (рис. 2).

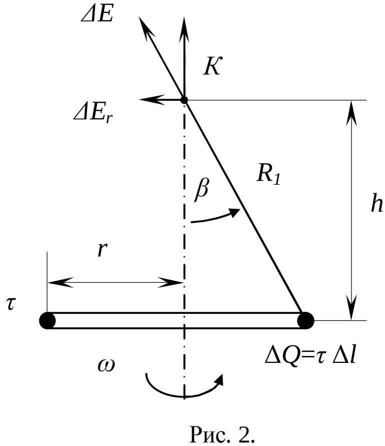


Рис. 2.

Из рисунка следует, что радиальная составляющая напряженности электрического поля, создаваемого элементом кольца $\Delta l$ в некоторой точке $K$ определяется выражением (5),

$$\Delta E_r = \left(\tau \Delta l / 4\pi\varepsilon R_1^2\right) \sin\beta. \tag{5}$$

Поле элемента кольца $\Delta l$ движется относительно точки $K$, поэтому появляется магнитное поле с напряженностью $\varepsilon\, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \times \Delta\mathbf{E}$, аксиальная составляющая которого $\Delta H$ выражается зависимостью (6),

$$\Delta H = \varepsilon\, \omega\, r \Delta E_r. \tag{6}$$

Проинтегрировав (6) по длине $2\pi r$ всего кольца получим напряженность магнитного поля, созданного вращением кольца, в точках, лежащих на оси вращения,

$$H = \frac{\tau}{2} \omega \sin^3 \beta = \varepsilon\varphi\omega \sin^2 \beta, \tag{7}$$

где $\varphi$ – потенциал электростатического поля, созданного кольцом в точке $K$,

$$\varphi = \tau \sin\beta / 2\varepsilon. \tag{8}$$

Формула (7) замечательна тем, что связывает потенциал электростатического поля с напряженностью магнитного поля в одной и той же точке пространства и не требует привлечения информации об электрическом состоянии других точек пространства.

Теперь воспользуемся формулой (7) для нахождения магнитного поля вращающейся сферы с поверхностной плотностью заряда $\sigma$ (рис. 3).

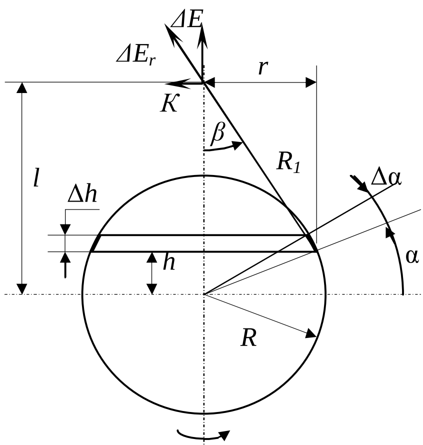


Рис. 3.

Вырежем на поверхности сферы полоску шириной $\Delta h$. Заряд полоски $\Delta Q$ составит величину $\Delta Q = \sigma\Delta S = \sigma 2\pi r R\Delta\alpha$, что соответствует линейной плотности заряда $\Delta\tau$,

$$\Delta\tau = \Delta Q / 2\pi r = R\sigma\Delta\alpha. \qquad (9)$$

При бесконечно малом приращении $\Delta h$ полоску можно отождествить с кольцом, имеющим линейную плотность заряда $\Delta\tau$. Тогда напряженность $\Delta H$ магнитного поля, создаваемого вращающейся полоской в точках, расположенных на оси вращения, в соответствии с зависимостью (7) составит

$$\Delta H = \frac{1}{2}\omega \sin^3 \beta \Delta\tau = \frac{1}{2}\omega \sin^3 \beta R_0 \sigma\Delta\alpha. \qquad (10)$$

Проинтегрируем эту зависимость по $\alpha$ с учетом того, что

$$\sin^3 \beta = \left(R^3 \cos^3 \alpha\right) \Big/ \left(\left(l - R\sin\alpha\right)^2 + R^2 \cos^2 \alpha\right)^{3/2}. \qquad (11)$$

В результате получим искомую напряженность магнитного поля в точках, расположенных на оси вращения внутри сферы,

$$H_{\text{внт}} = \frac{2}{3}\varepsilon\varphi\omega,, \qquad (12)$$

и снаружи сферы,

$$H_{\text{нар}} = \frac{2}{3}\varepsilon\varphi\omega\frac{R_0^3}{l_3}.. \qquad (13)$$

Потенциал $\varphi$ в формулах (12) и (13) является потенциалом как раз тех точек, в которых определяется напряженность магнитного поля.

Если подставить в выражение (12) зависимость для вычисления потенциала поверхности заряженной сферы, а значит и потенциала всех её внутренних точек, $\varphi = Q/4\pi\varepsilon R$, то выражение (12) приобретет вид (14),

$$H_{\text{внт}} = \frac{Q\omega}{6\pi R}, \qquad (14)$$

в точности соответствующий решению аналогичной задачи, приведенному в задачнике [3] (задача 253*). Это совпадение результатов подтверждает адекватность изначальных предположений о наличии поля внутри заряженной сферы, положенных в основу проведенного анализа.

Плотность $w_1$ энергии электрического поля внутри сферы, приходящаяся на единицу её заряда, может быть определена делением потенциала на объем сферы,

$$w_1 = \frac{\varphi}{V} = \frac{3Q}{16\pi^2 \varepsilon R^4}. \tag{15}$$

Плотность энергии $\omega$, обусловленная не единицей заряда, а всем зарядом сферы, определяется интегрированием,

$$w = \int w_1 dQ = \frac{3Q^2}{32\pi^2 \varepsilon R^4}. \tag{16}$$

Справедливость этой формулы подтверждается весьма необычным для электростатики образом – анализом напряженного (в механическом смысле этого слова) состояния поля снаружи и внутри сферы.

## 2 Механические напряжения в электростатическом поле

Поле является сплошной средой, посредством которой осуществляется силовое взаимодействие заряженных тел. Отсюда следует, что поле должно адекватно описываться законами механики сплошной среды. Никаких соображений, препятствующих применению этих законов, не существует, напротив, игнорирование положений механики существенно обедняет теоретический багаж физики электрических явлений.

Примем в качестве объекта исследования сферический конденсатор, внутренняя обкладка которого имеет радиус $R$, внешняя – $R_0$.

С точки зрения механики поверхностная плотность сил, действующих на обкладки, является порождением напряженного состояния той среды, которая находится внутри конденсатора, т. е. электрического поля. Поставим поэтому задачу нахождения зависимости механического напряжения $\sigma$ поля от радиуса $r$ в пространстве между обкладками, воспользовавшись для этого результатами теории упругости [4].

Двумя концентрическими сферами радиуса $r$ и $r + \Delta r$ и четырехгранным углом (с вершиной в центре конденсатора и малым телесным углом $\Delta\Omega$ при вершине) мысленно выделим элементарный пространственный фрагмент поля в пространстве между обкладками конденсатора (рис. 4).

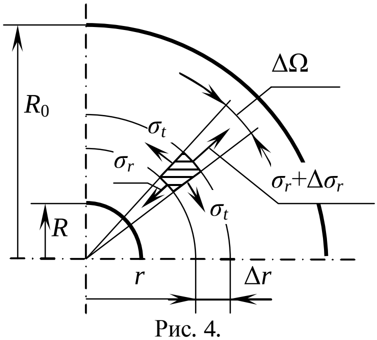


Рис. 4.

В механике показано, что условия статического равновесия для этого фрагмента, с учетом центральной симметрии поля, формализуются в виде уравнения (17)

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{2}{r}(\sigma_r-\sigma_t)=0, \tag{17}$$

где $\sigma_r$, $\sigma_t$ – нормальные напряжения в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно.

Перемещения $u$, деформации $\varepsilon$ и напряжения $\sigma$ связаны между собой формулами (18)

$$\varepsilon_r=\frac{1}{k}\sigma_r=\frac{du}{dr},\quad \varepsilon_t=\frac{1}{k}\sigma_t=\frac{u}{r}, \tag{18}$$

где $k$ – модуль упругости.

С учетом формул (18) уравнение (17) преобразуется в уравнение второго порядка (19) относительно перемещения $u$,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2du}{rdr}-\frac{2u}{r^2}=0. \tag{19}$$

Решение этого уравнения имеет вид (20),

$$u=C_1r+C_2\big/r^2, \tag{20}$$

где $C_1$, $C_2$ –постоянные интегрирования.

Зная решение (20), найдем вид зависимостей для определения нормальных напряжений:

$$\sigma_r=k\frac{du}{dr}=kC_1-\frac{2kC_2}{r^3}, \tag{21}$$

$$\sigma_t=kC_1+\frac{kC_2}{r^3}. \tag{22}$$

С учетом того, что обкладки конденсатора имеют заряды разного знака, поверхностная плотность сил, действующих на внешнюю обкладку, должна быть направлена к центру конденсатора. Нормальное напряжение $\sigma_r$, возникающее в поле при $r = R_0$, должно быть равно по абсолютной величине поверхностной плотности сил, но иметь противоположное направление,

$$\sigma_r\left(R_0\right)=kC_1-\frac{2kC_2}{R_0^3}=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_0^4}. \tag{23}$$

Выражение (23) должно выполняться при всех возможных значениях $R_0 > R$, в том числе и при бесконечно больших значениях, $R_0 \to \infty$. Но при таких значениях поверхностная плотность сил становится равной нулю, т. е. при $R_0 \to \infty$: $\sigma_r(R_0) \to 0$. По этой причине постоянная интегрирования $C_1$ должна быть равна нулю, $C_1 = 0$. Теперь из зависимости (23) можно найти постоянную интегрирования $C_2$,

$$C_2 = -\sigma_r\left(R_0\right)\frac{R_0^3}{2k} = -\frac{Q^2}{k64\pi^2\varepsilon_0 R_0}. \tag{24}$$

Таким образом, электрическое поле между обкладками конденсатора испытывает механическое напряжение (25) в радиальном и (26) в тангенциальном направлениях,

$$\sigma_r = \sigma_r(R_0)\frac{R_0^3}{r^3} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_0 r^3}, \tag{25}$$

$$\sigma_t = -\sigma_r(R_0)\frac{R_0^3}{2r^3} = -\frac{1}{2}\sigma_r. \tag{26}$$

Деформация в этих направлениях будет определяться выражениями (27) и (28) соответственно:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{k} = \frac{\sigma_r(R_0)}{k}\frac{R_0^3}{r^3}; \tag{27}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{k} = -\frac{\sigma_r(R_0)}{2k}\frac{R_0^3}{r^3}. \tag{28}$$

Заметим, что из формул (25)–(28) следует, что при бесконечно большом радиусе $R_0$ напряжения $\sigma_r$, $\sigma_t$ и деформации $\varepsilon_r$, $\varepsilon_t$ становятся равными нулю. Это весьма важный результат, свидетельствующий о том, что электростатическое поле в окружающем уединенный носитель заряда пространстве находится в ненапряженном состоянии. Плотность энергии поля во всех точках этого пространства равна нулю. Остается принять единственное решение: в случае уединенного носителя заряда энергия локализуется в электрическом поле, находящемся не вне, а внутри носителя заряда.

Доказав «теорему существования», поставим задачу определения характеристик напряженного состояния электрического поля во внутренней сфере, т. е. в той части пространства, которая удовлетворяет условию $r < R$.

Поле, как между обкладками конденсатора, так и во внутренней сфере обладает центральной симметрией, поэтому и в этих обстоятельствах остаётся справедливым уравнение (19) и его решение (20). Однако, теперь постоянная интегрирования $C_2$ будет равна нулю, поскольку перемещение в центре сферы должно быть равным нулю, $u = 0$ при $r = 0$. Зависимости (21), (25) для вычисления нормальных напряжений приобретает вид (29) и (30),

$$\sigma_r(r) = kC_1, \tag{29}$$

$$\sigma_t(r) = kC_1. \tag{30}$$

На поверхности сферы должно выполняться равенство

$$f_R = -\sigma_r(R) = -kC_1, \tag{31}$$

откуда следует, что составляющие нормальных напряжений одинаковы во всех точках, расположенных внутри сферы, и равны величине $\sigma_r(R)$,

$$\sigma_t(r) = \sigma_r(r) = \sigma_r(R) = -\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}. \tag{32}$$

Это означает, что поле внутри сферы находится в состоянии объемного всестороннего (гидростатического) сжатия.

Деформация поля в этих условиях составляет величину

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{\sigma_r(R)}{k} = -\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4 k}. \tag{33}$$

Осталось найти, чему равен модуль упругости $k$, входящий в выражение (33).

В соответствии с теорией упругости плотность энергии $w$ в условиях гидростатического сжатия является величиной, вычисляемой по выражению

$$w = \frac{1}{2}\left(\sigma_r\varepsilon_r + 2\sigma_t\varepsilon_t\right) = \frac{3}{2}\frac{\sigma_r^2(R)}{k}. \tag{34}$$

Энергия всего поля, заключенного в сфере, с одной стороны может быть вычислена произведением плотности $w$ на её объем, а с другой – она должна быть равна энергии, уединенной заряженной сферы:

$$\frac{3\sigma_r^2(R)}{2k}\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}. \tag{35}$$

Разрешив уравнение (35) относительно $k$, получим

$$k = \frac{Q^2}{64\pi^2\varepsilon_0 R^4} = \frac{1}{2}\sigma_r(R). \tag{36}$$

Подставим теперь значение $k$ в выражение (34) и найдем плотность энергии $w$, внутри уединенной заряженной сферы,

$$w = 3\sigma_r\left(R\right) = \frac{3Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}. \qquad (37)$$

Исследование вопроса о локализации энергии электрического поля можно считать законченным.

**Выводы**

1) Зависимости (16) и (37), полученные совершенно независимым друг от друга образом, совпали. Это говорит о правильности той точки зрения, что энергия электрического поля является энергией его всестороннего сжатия во внутреннем пространстве носителя заряда. Поле в пространстве, окружающем носитель заряда, находится в свободном (ненапряженном) состоянии, плотность энергии в нем равна нулю. Такое состояние поля в этой части пространства сохраняется до тех пор, пока в него не будет внесено какое-либо заряженное тело, например, пробный носитель с единичным зарядом.

2) Классическое представление об электрическом поле, которое обнаруживается, как сказано в [1], только по возникновению силы, действующей на заряженные тела, должно быть расширено с учетом эффекта появления магнитного поля даже в том случае, когда силовая составляющая взаимодействия отсутствует, но имеется движение электрического поля.

3) В стремлении к совершенству теории электричества не следует исходить из традиционной точки зрения, принятой отцами-создателями теории за основу. Эта точка зрения изложена в пособии [1]: «… изучение электрических явлений чрезвычайно облегчается, если исходить из представления, что … во всех точках пространства, окружающего заряд *e*, всегда существует электрическая сила, … вне зависимости от того, проявляется ли существование этой силы в воздействии ее на пробный заряд (в случае наличия такового) или же ни в чем не проявляется (в случае отсутствия такового)». Видимо, когда-то эта точка зрения способствовала развитию теории, но в настоящее время это не так. Не стоит для «облегчения изучения» привносить в задачу эффекты, столь существенно искажающие объект изучения.

**Л И Т Е Р А Т У Р А**


1. Тамм И.Е. **Основы теории электричества**. М.: Наука, 1966. 624 с.
2. Мултановский В.В. **Курс теоретической физики. Классическая электродинамика: учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб.** В.В. Мултановский, А.С. Василевский. М.: Дрофа, 2006. 348 с.
3. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. **Сборник задач по электродинамике. Изд.2-е. Учебное пособие**. Изд-во «Наука», 1970. 504 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. **Теория упругости**. Изд-во «Наука», 1975. 576 с.